MA1 – přednáška 19. 10. 2020

Motto: Jak hledat (a někdy i najít) limitu funkce.

Zatím: Intuitivně jsme „budovali" pojem limity u známých (elementárních) funkcí, „popsali" jsme si jednotlivé „druhy" limit (vlastní, nevlastní limity ve vlastních i nevlastních bodech, i limity jednostranné), ukázali jsme si, jak pomocí limity definovat spojitost funkce (v bodě z definičního oboru funkce).
a pomocí limit, které se nám „povedlo" určit dokonce u složené funkce $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, jsme si uměli zhruba představit i graf této funkce (to, že tato funkce je klesající v $(-\infty, 0)$ i v $(0, +\infty)$ jsme ukázali jako příklad v minulé přednášce též).

Dnes: Pokusíme se (stále ještě intuitivně) o návody k nalezení limit funkcí, vytvořených z těch funkcí, jejichž limity už známe.

Ve středeční přednášce (21.10.) si pak ukážeme, jak se vytvoří teorie k řešení problémů s limitami, jak od naší intuice dojdeme k definicím limit, k větám o limitách a odtud i k nalezení limit funkcí (tj. výpočtům limit).

Dnes začneme připomenutím, jak z jednoduchých funkcí „děláme" ty funkce složitější, a také si zavedeme několik užitečných „označení" (jak se v matematice říká), které nám pak zjednoduší zápis (myšlenek i tvrzení).

Jak „vytváříme" složitější funkce?

(funkce f, g jsou definované na M, $\emptyset \neq M \subset R$)

sčítáním: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $x \in M$;

násobením: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in M$;

(spec. $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$, $c \in R$, $x \in M$);

dělením: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, $x \in M$;

dále je užitečná absolutní hodnota funkce: $|f|(x) = |f(x)|$, $x \in M$

a funkce složená:

mějme funkce $h: \mathcal{D}h \subset R \to R$, $g: \mathcal{D}g \subset R \to R$, pro které platí: $x \in M \subset \mathcal{D}h \Rightarrow h(x) \in \mathcal{D}g$;

pak funkce $f(x) = g(h(x))$, $x \in M$, se nazývá funkce složená, $h(x)$ je funkce vnitřní, a funkce $g(x)$ se nazývá funkce vnější.

(Symbolem $\mathcal{D}f$ značíme definiční obor funkce f, t.j. množinu všech reálných čísel, pro které existuje hodnota $f(x)$, také se říká – kde je funkce f „definovaná".)

A označení pro zjednodušení vyjadřování i zápisu (našich myšlenek):

1) $R^* = R \cup \{-\infty; \infty\}$ (R – množina reálných čísel)

2) okolí bodu $a \in R^*$:

(i) $a \in R$:

obyčejné okolí bodu $a \in R$ o poloměru $\varepsilon > 0$ (někdy se spíše říká ε-ové okolí bodu a):

$U(a, \varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ $(= \{x \in R;\ |x-a| < \varepsilon\}$

<u>prstencové okolí bodu $a\in R$</u> o poloměru $\varepsilon>0$ (prstencové ε-ové okolí):

$$P(a,\varepsilon) = \{ x\in R;\ 0<|x-a|<\varepsilon \} = (a-\varepsilon,a)\cup(a,a+\varepsilon)$$
$$(= U(a,\varepsilon)\setminus\{a\})$$

ii) <u>okolí „nekonečen"</u>:

$U(+\infty)\ (=P(+\infty)) = (\alpha,+\infty)$, kde α je libovolné reálné číslo;

$U(-\infty)\ (=P(-\infty)) = (-\infty,\alpha)$, $\alpha\in R$ (opět libovolné)

<u>A nyní – tvrzení „o limitách"</u>:

1) <u>Existence limity funkce</u>

(i) Existuje-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a\in R^*$, pak je funkce f definována v nějakém prstencovém okolí bodu a. (v $P(a)$).

(ii) Funkce f má v bodě $a\in R^*$ nejvýše jednu limitu.

(tj. f buď v bodě <u>a</u> limitu nemá, a pokud má, tak jedinou – – v matematice „takto" existenci „doplnit")

2) <u>„Výpočet" limit složitějších funkcí</u>

(i) je „dobré" mít pravidla pro „skládání" složitějších limit z těch jednodušších, již známých;

(ii) k nalezení limity složitější funkce, jejíž limity „nevidíme" – je třeba „odhalit" způsob vytvoření funkce vyšetřované, jakousi „strukturu" její, a pak užít pro výpočet limity pravidla (i) – a tato pravidla si „sepíšeme" dále.

Aritmetika limit:

věty o limitě součtu, součinu a podílu funkcí (uvedeme pro oboustranné limity, zřejmě platí analogicky i pro limity jednostranné):

Označme: $a \in R^*$, funkce f, g jsou definovány v prstencovém okolí bodu a, nechť dále $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = K$, $L, K \in R^*$

Pak (stále intuitivně) platí:

a) Limita součtu:

$$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = K + L \quad \text{pro } K, L \in R$$

$$= \underset{(-)}{+}\infty \quad \text{, pro } K \in R,\ L = \underset{(-\infty)}{+\infty}$$

$$= +\infty \quad \text{, pro } K = +\infty,\ L = +\infty$$

$$= -\infty \quad \text{, pro } K = -\infty,\ L = -\infty$$

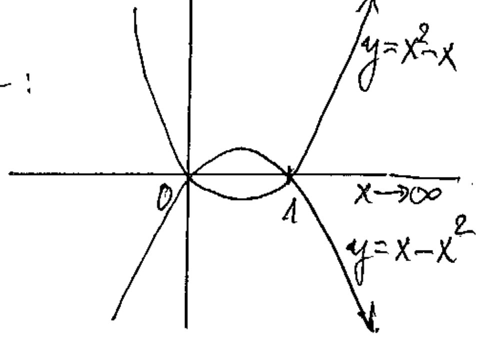
Ale je zde problém! – když $K = +\infty$, $L = -\infty$
(značme zpravidla „$\infty - \infty$")

Příklady: $\lim_{x\to 1} (x^2 + e^x) = 1 + e$
$\left(\lim_{x\to 1} x^2 = 1,\ \lim_{x\to 1} e^x = e^1 = e\right)$

$\lim_{x\to +\infty} (x^2 + e^x) = \infty$
(neboť $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$)

! ale „$\infty - \infty$": $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - x) = +\infty$

ale $\lim_{x\to\infty} (x - x^2) = -\infty$ } z grafu:



a $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - (x^2+1)) = -1$

$\left(\lim_{x\to+\infty} ((x^2+c) - x^2) = c\right.$, c libovolné!)

Tedy, z posledního příkladu vidíme, že limita typu „$\infty - \infty$", jak tyto limity „označujeme" (tj. když $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$) může být „cokoliv": $+\infty, -\infty, c\in\mathbb{R}$ (ex-li).

<u>Limita typu „$\infty - \infty$" nazýváme v matematice neurčitý výraz.</u>
(a to jsou „problémy" v limitění – budeme zkoušet řešit)

b) <u>Limita součinu:</u>

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \begin{cases} K.L & \text{, když } K,L\in\mathbb{R};\\ +\infty & \text{, když } L>0,\ K=+\infty \text{ (nebo } L<0,\ K=-\infty)\\ -\infty & \text{, když } L<0,\ K=+\infty \text{ (nebo } L>0,\ K=-\infty)\\ +\infty & \text{, když } L=+\infty,\ K=+\infty \text{ (nebo } L=-\infty,\ K=-\infty)\\ -\infty & \text{, když } L=+\infty,\ K=-\infty \end{cases}$$

a neurčitý výraz (tj. problém) zde je, když $L=0$, $K=\underset{(-)}{+}\infty$,
tj. <u>neurčitý výraz je „$0 . \infty$"</u> – opět se nedá říci „pravidlo", jak limita „dopadne" – viz příklad

<u>Příklady:</u>

$\lim_{x\to 0} x.\sin x = 0$ $\quad(\lim_{x\to 0} x = 0,\ \lim_{x\to 0}\sin x = 0)$

$\lim_{x\to+\infty} x^2.e^x = \infty$ $\quad(\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right).e^x = +\infty$ $\quad(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right) = 1\ \ (\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0)$ a $\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty)$

! <u>ale</u>: $\lim_{x\to\infty}(3x^2).\frac{1}{x^2} = „\infty . 0" = \lim_{x\to\infty} 3 = 3$

$\lim_{x\to\infty}(3x^3).\frac{1}{x^2} = „\infty . 0" = \lim_{x\to\infty}(3x) = \infty$

$\lim_{x\to\infty}(3x^2).\frac{1}{x^3} = „\infty . 0" = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x} = 0$

c) <u>limita podílu:</u>

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}, \text{ když } L, K \in R,\ K \neq 0;$$
$$= +\infty, \text{ když } L=+\infty, K>0 \ (L=-\infty, K<0)$$
$$= -\infty, \text{ když } L=+\infty, K<0 \ (L=-\infty, K>0)$$

<u>a zřejmě i platí:</u>

když $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \underset{(-)}{+}\infty$, pak $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = 0$

(budeme stručně psát „$\frac{1}{\infty} = 0$")

<u>a jaké neurčitosti jsme zatím „nevyřešili"?</u>

(i) limitu $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}$, když $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

(ii) limitu $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, když $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

nebo když $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \underset{(-)}{+}\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \underset{(-)}{+}\infty$;

a zde – <u>limity typu „$\frac{0}{0}$", i „$\frac{\infty}{\infty}$" jsou další neurčité</u> <u>výrazy</u>, k výsledku „limitění" se dostaneme tak, že tyto limity vhodnými „úpravami" převedeme na limity funkcí, které už „zvládneme" užitím aritmetiky limit.

<u>Ilustrujme zatím (intuitivně) promyslet limitu typu „$\frac{1}{0}$"</u>

(1) Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, pak $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|} = +\infty$.

Navíc je třeba předpokládat, že $\frac{1}{f(x)}$ je definována v $P(a)$, tj. $f(x) \neq 0$ v nějakém $P(a)$

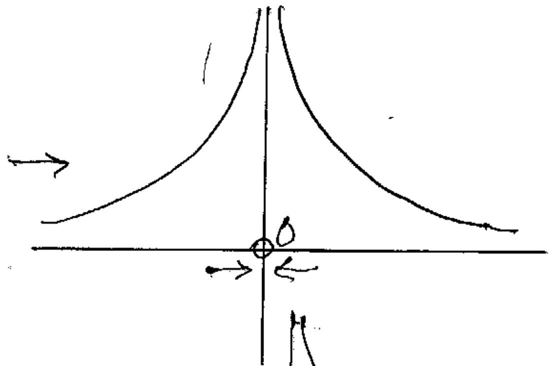
② Když $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, a $f(x)>0$ (resp. $f(x)<0$) v $\mathcal{O}(a)$,

pak $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = -\infty$)

(budeme při počítání limit značit „$\frac{1}{0+}$" pro $f(x)>0$ v $\mathcal{O}(a)$,
a „$\frac{1}{0-}$" pro $f(x)<0$ v $\mathcal{O}(a)$)

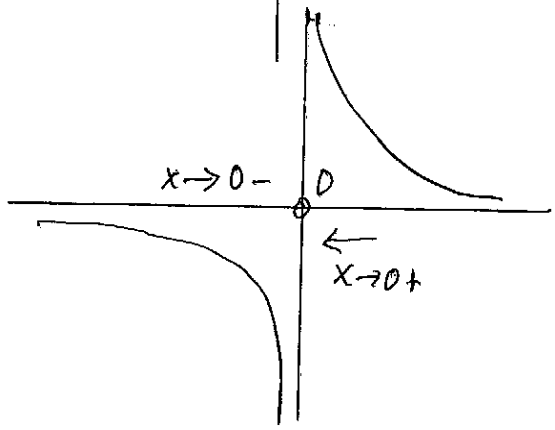
! A k bodu ② „tahákové" pomoc :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty \quad \left(„\frac{1}{0+}" \right)$$



$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = „\frac{1}{0+}" = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = „\frac{1}{0-}" = -\infty$$



A jednoduché příklady limit podílu:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+5}{(x+3)^2} = \dfrac{1+5}{(1+3)^2} = \dfrac{3}{8}$ (funkce je spojitá nejen v bodě $x=1$, a ve všech bodech $\mathcal{D}f=(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$)

2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2}{(x+3)^2} = „\dfrac{2}{\infty}" = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2}{(x+3)^2} = „\dfrac{2}{0+}" = +\infty$;

4) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+5}{(x+3)^2} = „\dfrac{2}{0+}" \left(= 2\cdot „\dfrac{1}{0+}"\right) = +\infty$;

ale 5) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{2}{x+3}$ neexistuje, neboť (jak jsme „říkali" minule)

$$\lim_{x\to -3+} \frac{2}{x+3} = \text{„}\frac{2}{0+}\text{"} = +\infty, \text{ a } \lim_{x\to -3-} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{0-} = -\infty$$

(už jsme toto viděli u funkce $f(x)=\frac{1}{x}$, příklad je podobný)

<u>Tedy vidíme, že v aritmetice limit jsou problémy u neurčitých výrazů:</u>

? $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ – „co" s nimi ?

<u>Návod</u>: pokusíme se o takovou úpravu dané funkce, která nezmění její limitu v daném bodě a přitom „převede" neurčitý výraz na takový, jehož limitu už lze nalézt dle uvedených známých pravidel.

<u>a platí</u> (asi každý věří):

<u>Věta</u>: Je-li $f(x)=g(x)$ v $P(a)$, a ex-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, pak existuje i $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L \; (= \lim\limits_{x\to a} f(x))$.

(„opora" pro úpravy při počítání limit)

Spočítejme teď několik příkladů limit – neurčitých výrazů i jiných – <u>a k tomu ještě poznámka</u>: „obtížnost" limit neurčitých výrazu je „obrácená" než aritmetických operací – nejtěžší hra vyřešit limitu typu $\infty - \infty$, převede se občas na druhou „obtížnou" – limitu „$0 \cdot \infty$", a ta zase na ty „nejlehčí" – limity typu „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\infty}{\infty}$" – uvidíme.

Příklady výpočtu limit – neurčité výrazy i jiné:

a) limita podílu (nejjednodušší z neurčitých výrazů):

„$\frac{0}{0}$":

1) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2+3x-4} \overset{(i)}{=} „\frac{0}{0}" \overset{(ii)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{(x-1)}(x+4)} \overset{(iii)}{=} \frac{4}{5}$$

(i) limitu čitatele i jmenovatele zjistíme dosazením $x=1$ (neboť jsou to spojité funkce – zřejmé) –

(ii) tím uděláme „diagnózu" – o limitu jakého typu se jedná! – to je třeba vždy, odtud často plyne návod k řešení;

(iii) „zviditelnili" jsme „nuly" – tj. provedli jsme rozklad polynomů na kořenové činitele, neboť $x=1$ byl kořen čitatele i jmenovatele; a upravíme – „krátíme nuly"

(iv) a pak už limitu spočítáme „dosazením" – aritmetika limit.

2) $$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} \text{ (rozdíl čtverců) } = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

dosadíme $x=4$ („diagnóza")

(dosazením)

zde jsou „vidět" nuly!

nebo i „jinak": (opět pomůže rozdíl čtverců)

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{\sqrt{x}-2}}{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

(jinak „zviditelnění" nul!);

ale zatím neumíme důležité (v budoucnu přednášky) limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x-1}$$ – všechny jsou typu „$\frac{0}{0}$".

$\underline{\text{„}\frac{1}{0}\text{"}}$: $\underline{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}}} = \text{„}\frac{1}{0+}\text{"} = \underline{+\infty}$ a

($\sqrt{x} > 0$ pro $x > 0$)

$\underline{\text{„}\frac{1}{\infty}\text{"}}$: $\underline{\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}}} = \text{„}\frac{1}{\infty}\text{"} = \underline{0}$

a dále trochu

$\underline{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}$: 1) $\underline{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^2+3x-4}} = \text{„}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"} = $ („vytáhneme" nejrychlejší ∞ „)

(víme z grafu)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \text{„}\frac{1+0-0}{1+0-0}\text{"} = \underline{1}$$

(aritmetika limit)

(a víme též, že $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x} = \text{„}\frac{2}{\infty}\text{"} = 0$, a také (stejně)

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(-\frac{3}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$ – dle „pravidel"

pro limitu typu „$\frac{a}{\infty}$" $= 0$, $a \in R$ (platí i pro $a = 0$)

2) $\underline{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3-x^2+1}{2x^2+x+2}} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} =$

(opět „vytáhneme" nejrychlejší ∞)

$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \text{„}\infty \cdot 1\text{"} = \infty$$

(neboť, opět limity $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

a užijeme pravidla aritmetiky limit)

b) <u>limita součinu typu „$0 \cdot \infty$":</u>

rada – převést na podíl a limitu typu „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\infty}{\infty}$":

1) $$\underline{\lim_{x\to\infty} (x^2+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}} = „\infty\cdot 0" = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x}+1} = „\frac{\infty}{\infty}" \overset{*}{=}$$

$$\left(\lim_{x\to\infty} x^2+1 \underset{AL}{=} „\infty+1" = 1,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\infty} \underset{AL}{=} 0\right)$$

– je dobré (a potřebné!) udělat „diagnózu" limity po každé úpravě –

$$\overset{*}{=} \underset{\text{(vytáhneme } \infty)}{\lim_{x\to\infty}} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{3/2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = „\frac{\infty\cdot 1}{1}" = \underline{\infty}$$

2) $$\underline{\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}-1)\cdot\frac{1}{x^2-1}} = „0\cdot \underset{(-)}{+}\infty\ (?)" \underset{„\text{na podíl}"}{=} *$$

$$\left(\lim_{x\to 1+}\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0+} = +\infty,\ \lim_{x\to 1-}\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0-} = -\infty\right)$$

$$* = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\underbrace{(x+1)}_{\to 2}\underbrace{\sqrt{x}+1}_{\to 2}} = \underline{\frac{1}{4}}\ (AL)$$

(AL – zkratka pro aritmetiku limit)

3) $$\underline{\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)} \overset{?}{=} „\infty\ (\infty-\infty)" \overset{*}{=}$$ (opět úprava „doplnění" na čtverec – zbaví nás $\sqrt{\ }$ a bude se lépe počítat)

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = „\frac{\infty}{\infty}"$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \underset{AL}{=} \underline{\frac{1}{2}}\quad \left(\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1\right),$$

opět „srovnatelné" ∞ v čitateli a jmenovateli

nebot' $\frac{1}{x^2}\to 0$ pro $x\to\infty$

a $\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \underset{AL}{=} \sqrt{1} = 1$)

c) limita rozdílu „$\infty - \infty$" :

rada – pokud možno limitu tohoto typu převést na součin, nebo lépe raději na podíl (pokud ještě součin bude neurčitý výraz)

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 - 2x^2 + 71x \right) = \infty$ (asi) intuitivně, i když nevidíme graf – tušíme, že vyhrává x^3!

a „řádně" (dle pravidel AL)

$$\lim_{x\to\infty} (x^3 - 2x^2 + 71x) = \text{„}\infty - \infty + \infty\text{"} = (?)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{71}{x^2}\right) = \text{„}\infty \cdot 1\text{"} = \underline{\infty}$$

(neboť $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{71}{x^2} = 0$ – limity typu „$\frac{a}{\infty} = 0$")

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) = \text{„}\infty - \infty\text{"} \underset{\text{„podle 1)"}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1}_{\to 0} \right) =$ $\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \to 1\right)$

$= \text{„}\infty \cdot 0\text{"}$ – zde jsme si nepomohli – ona ta nekonečna v $\sqrt{x^2+1}$ a x jsou „skoro stejná" (*)

zkusme převedení na podíl (a současně se zbavme odmocniny):

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1} + x} = \text{„}\frac{1}{\infty}\text{"} \underset{(AL)}{=} 0$$

(odpovídá úvaze (*))

3) zkuste podobně (sami)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x \right) = \frac{1}{2} \ !$$

Ale opět, vypadá to, že nekonečna v „$\infty - \infty$" jsou „stejná" !?

Poznámka:

Ale ještě nezvládneme (opět) důležité limity

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$, a tedy ani ne limity

$\lim\limits_{x\to\infty} (e^x - x) = „\infty - \infty" \stackrel{?}{=} \lim\limits_{x\to\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) \underset{\text{nebo}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) -$

– ale zvládneme i tyto limity později (až budeme umět derivovat)

A nyní velmi důležitá věta – o limitě složené funkce:

už jsme intuitivně zvládli limity složené funkce $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, tedy zobecnění:

Věta (o limitě složené funkce) – (v „počítání" budeme značit (VLSF))

1) nechť $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, $(a, b \in R^*)$;

2) nechť $\lim\limits_{y\to b} f(y) = L$ $(L \in R^*)$

3) existuje $P(a)$ tak, že pro $x \in P(a)$ je $g(x) \neq b$ (je-li $b \in R$)

Pak existuje i limita $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = L$,

(tj. $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to b} f(y)$)

Poznámky: 1) proč je ve větě předpoklad 3? –

– $f(y)$ je obecně (pro limitění) definovaná „kolem" bodu b, tj. pokud by v každém $P(a)$ byl bod, kde $g(x) = b$ – pak by složená funkce $f(g(x))$ nebyla definovaná v žádném okolí bodu a!

2) je-li funkce vnější $f(y)$ spojitá v bodě $b \in R$, pak předpoklad 3) věty není nutný, stejně tak pro $b = \pm\infty$ (proč? – promyslete!)

Příklady:

1) $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty}$,

neboť zde: $f(y)=\sqrt{y}$, $g(x) = x^2+1$, $a=+\infty$, $b=\infty$,

a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = „\infty+1" \underset{AL}{=} \infty$; předpoklad 3) není zde nutný!

2) $\underline{\lim\limits_{x\to ?} \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)}$; $\underline{x\to ?}$ – zde „znamená" výzva, promyslete, kde jsou vhodné výpočty limit!

(i) funkce $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ je definována pro $\frac{x+1}{x-2} > 0$,

tj. $\mathcal{D}f = (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$ (jistě snadno najdeme) –

– tedy (třeba pro představu grafu funkce f) jsou užitečné $\underline{\text{limity pro } x\to\pm\infty,\ x\to -1-,\ x\to 2+}$;

1) $\underline{\text{ve všech bodech } a\in\mathcal{D}f \text{ je funkce } f \text{ spojitá!}}$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ a\in\mathcal{D}f}} \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \lim_{y\to b} \ln y = \ln\left(\frac{a+1}{a-2}\right) \underline{\left(=f(a)\right)}$$

$b = \frac{a+1}{a-2}$, neboť $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ a\neq 2}} \frac{x+1}{x-2} = \frac{a+1}{a-2}$

2) $\underline{\text{a nyní limity v krajních bodech intervalů z } \mathcal{D}f:}$

$$\underline{\lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)} \underset{(VLSF)}{=} \lim_{y\to 1} \ln(y) = \ln 1 = \underline{0} \quad (\text{spojitost } \ln x),$$

neboť $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x-2} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})} \underset{AL}{=} 1$

$$\lim_{x\to 2+} \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \underset{(VLSF)}{=} \lim_{y\to+\infty} \ln y = +\infty \text{ („tabák“)},$$

neboť limita vnitřní funkce je: $\lim_{x\to 2+} \frac{x+1}{x-2} = „\frac{3}{0+}“ = +\infty$

a $\lim_{x\to -1-} \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \underset{(VLSF)}{=} \lim_{y\to 0+} \ln y = -\infty$ („tabák“),

neboť limita vnitřní funkce je: $\lim_{x\to-1-} \frac{x+1}{x-2} = „\frac{0-}{-2}“ = 0$

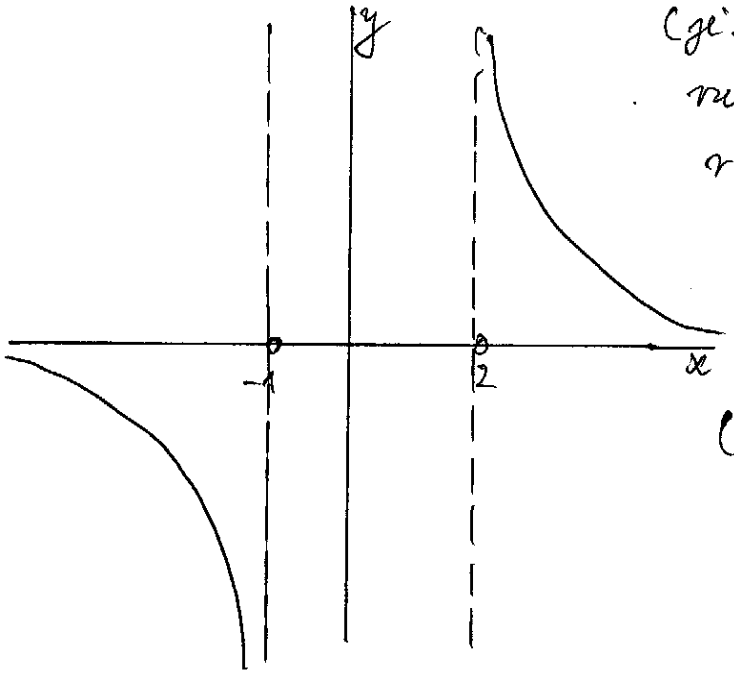
(a $y = \frac{x+1}{x-2} > 0$ pro $x \in (-\infty,-1)$)

<u>A zkusme graf (odhad grafu)</u>

funkce $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ je klesající v intervalu $(-\infty,-1)$ i v intervalu $(2,+\infty)$

(je složená z vnější rostoucí fce a vnitřní fce $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ je klesající v $(-\infty,-1)$ i v $(2,+\infty)$

$\left(g(x) = 1 + \frac{3}{x-2} \quad „\sim“ \ T: \frac{1}{x} \right)$



($\frac{x+1}{x-2} < 1$ pro $x \in (-\infty,-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right) < 0$ v $(-\infty,-1)$ a

$\frac{x+1}{x-2} > 1$ v $(2,+\infty)$, tedy

$\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right) > 0$ v $(2,+\infty)$ –

– „odpovídá“ limitám a monotonii funkce f)

Ještě limita absolutní hodnoty funkce:

Věta: nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ $(a\in\mathbb{R}^*,\ L\in\mathbb{R}^*)$, pak

existuje i $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$ a je $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |L|$

(zde značme $|\infty| = \infty$, $|-\infty| = \infty$)

A ještě jedno užitečné tvrzení (promyslete, možná příští přednáška „dokážeme"):

Věta: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x\to a}|f(x)| = 0.$

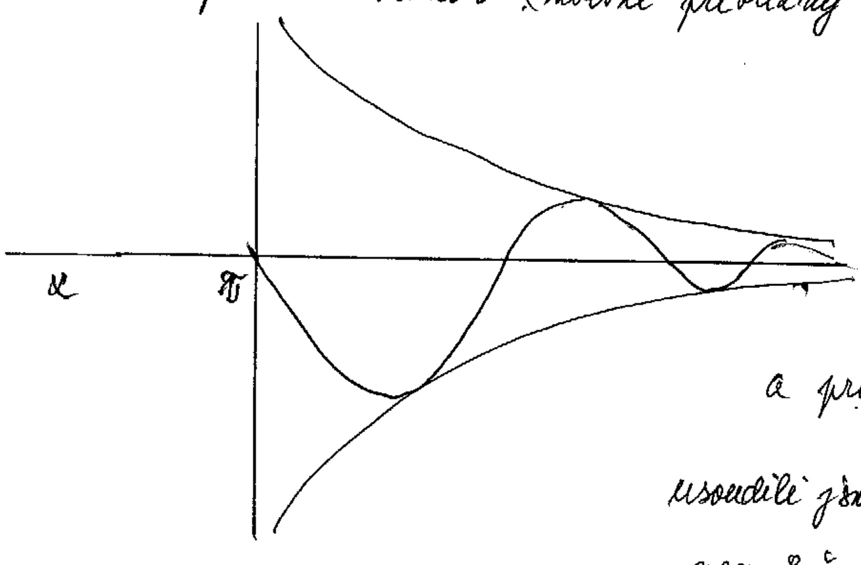
A nakonec „poslední" návod pro výpočet limity funkce:

(„zatím" poslední)

Už jsme v minulé přednášce zvládli $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x =$ „$0\cdot$ neexistuje" –

– ale víme, že $= 0$!

Připomeňme: obrázek (hodně přibližný) a víme, že



$-1 \le \sin x \le 1$ v $\mathbb{R}$,

proto pro x (třeba $x \ge \pi$) je

$$-\frac{1}{x} \le \frac{1}{x}\sin x \le \frac{1}{x},$$

a protože $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ („T"),

usoudili jsme, že ani funkce $f(x) = \frac{1}{x}\sin x$

nemůže „udělat" nic jiného, tedy,

že $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x = 0$!

A věta (k tomuto příkladu)

Věta (o limitě sevřené funkce)

(„lidově" věta o dvou strážnících – zkratka v „počtech" VOS)

Nechť 1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ v nějakém $P(a)$, $a \in R^*$

2) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L \in R$;

Pak existuje i $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

(analogicky platí i pro jednostranné limity v bodě $a \in R$)

Příklad: $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}\cos x =$ „ $0 \cdot$ nez" $= 0$,

neboť platí 1) $-e^{-x} \leq e^{-x}\cos x \leq e^{-x}$

$(-1 \leq \cos x \leq 1$ v R, a $e^{-x} > 0$ v $R)$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} =$ „ $\frac{1}{\infty}$ " $= 0$

A ještě vidíte i analogie VOS pro nevlastní limity $\pm\infty$.

Věta:

Nechť 1) $f(x) \geq g(x)$ v $P(a)$ $(a \in R^*)$ (resp. $P^+(a)$, resp. $P^-(a)$);

2) existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to a+} g(x) = +\infty$, resp. $\lim\limits_{x\to a-} g(x) = +\infty$)

Pak existuje i $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, resp. $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$) a

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$, resp. $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = +\infty$)

a podobně (a analogicky i pro limity jednostranné)

<u>Věta:</u> Nechť 1) $f(x) \leqq g(x)$ v $P(a)$, $a \in R^*$;

2) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$.

Potom i $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

<u>Příklady:</u>

1) (minulou přednášku jsme už uvažovali)

$\underline{\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty}$,

neboť 1) $x + \sin x \geqq x - 1$ v R, a

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$ (AL)

2) $\underline{\lim\limits_{x \to +\infty} x(2 + \cos x)}$:

1) $2 + \cos x \geqq 1 \Rightarrow$
$x(2 + \cos x) \geqq x$ pro $x > 0$
(pro $x \to \infty$ „stačí")

2) $\lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\lim x(2 + \cos x) = +\infty}$

A ještě z aritmetiky limit a z věty o limitě složené funkce získáme jako důsledek definice spojitosti funkce věty o spojitosti $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, a funkce složené:

Připomeneme definici spojitosti funkce v bodě $a \in D_f$:

Definice: funkce f je spojitá v bodě $a \in D_f$ (resp. v $a+$, a^-), když $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, resp. $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

A odtud hned plyne věta (vyslovíme pro spojitost oboustrannou, analogická tvrzení platí i pro jednostrannou spojitost.

Věta:

1) Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité v bodě $a \in D_f \cap D_g$; pak i funkce $f(x)+g(x)$ a $f(x).g(x)$ jsou spojité v bodě a, a je-li $g(a) \neq 0$, i podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ je funkce spojitá v bodě a.

2) Spojitost složené funkce:

Nechť 1) funkce $g(x)$ je spojitá v bodě $a \in D_g$;
2) funkce $f(y)$ je spojitá v bodě $b = g(a)$;

Potom i funkce složená $f(g(x))$ je v bodě a spojitá

Promyslete modifikace pro jednostranné spojitosti funkce složené (problémek pro „zájemce“).